

Если

$$A(l^\alpha / \alpha + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)l^{\alpha-2}(1 + (\alpha-3)l^{\alpha-3}) + \alpha(\alpha-1)l^{\alpha-1}) / \Gamma(\alpha) < 1,$$

то задача (2), (3) имеет в классе $L_f^{(2)}(0; l)$ единственное решение.

Литература

1. Семенчук, Н.П. Дифференциальные уравнения / Н.П. Семенчук 1982. – Т. 18. – № 10. – С. 1831–1833.

УДК 517

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Охримчук А.В., Дацьк В.Т.

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Найдены условия существования и единственности задачи Коши и получена оценка приближения решения для дифференциального уравнения нецелого порядка.

$$y^{(\alpha)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1)$$

где $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$.

Пусть функция f - абсолютно интегрируема на параллелепипеде Π_{lhj} .

Решение уравнения (1) будем искать в классе дифференцируемых до порядка $n-1, n \in \mathbb{N}$, функций $y = y(x)$ на отрезке $[0, l]$ с абсолютно непрерывной на этом отрезке производной $y^{(n-1)}(x)$. Причем, для любых указанных функций $y = y(x)$ функция $\mu(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ должна быть также абсолютно непрерывной на отрезке $[0, l]$ (условие (*)). Норма для функций $y = y(x)$ вводится по формуле:

$$\|y(x)\| = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^l |y^{(j)}(x)| dx \quad (2)$$

Указанный класс функций $y = y(x)$ обозначим через $L^{(i)}(0, l)$.

Теорема 1. Если для уравнения (1) функция f — абсолютно интегрируема на параллелепипеде Π_{lhj} и для любых точек $M_1(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)})$ и $M_2(x, y_2, y'_2, \dots, y_2^{(n-1)})$ из Π_{lhj} будет

$$|f(M_1) - f(M_2)| \leq A \sum_{j=0}^{n-1} |y_1^{(j)} - y_2^{(j)}|, \quad (3)$$

где A — некоторая положительная константа, а также выполняется условие (*), то уравнение (1) при выполнении неравенства

$$\frac{A}{\tilde{A}(\alpha)} \left(\frac{l^\alpha}{\alpha} + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(j-1))l^{\alpha-j} \right) < 1$$

имеет в классе $L^{(i)}(0, l)$ единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$D^{-(1-\alpha)}y(0) = y_0^{(n-1)} = D^{-(2-\alpha)}y(0) = y_0^{(n-2)} = \dots = D^{-(n-\alpha)}y(0) = y_0 = 0, \quad (4)$$

где Γ - гамма-функция, $D^{-\beta}$ - дробный интеграл порядка $\beta > 0$, D^β - дробная производная порядка $\beta > 0$.